## 基础课08 函数的奇偶性、周期性与对称性

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 函数的奇偶性 | 了解 | 2023年新高考Ⅱ卷 | ★★☆ | 数学运算直观想象 |
| 函数的周期性 | 了解 | 2022年新高考Ⅱ卷 | ★☆☆ | 数学运算直观想象 |
| 函数的对称性 | 了解 | 2022年新高考Ⅰ卷 | ★☆☆ | 数学运算直观想象 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，函数的奇偶性是高考常考内容，一般以选择题或填空题的形式出现.命题热点为函数奇偶性的应用，函数的周期性与对称性以抽象函数为背景的考查较多.预计2025年高考命题热点为函数奇偶性的应用 | | | |

### 基础知识·诊断

#### 夯实基础

##### 一、函数的奇偶性

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 奇偶性 | 定义 | 图象特点 |
| 偶函数 | 一般地，设函数的定义域为，如果，都有，且①，那么函数就叫作偶函数 | 关于②轴对称 |
| 奇函数 | 一般地，设函数的定义域为，如果，都有，且③，那么函数就叫作奇函数 | 关于④原点对称 |

##### 二、函数的周期性

|  |  |
| --- | --- |
| 周期函数 | 一般地，对于函数，如果存在一个非零常数，使得当取定义域内的任何值时，都有⑤,那么就称函数为周期函数，称为这个函数的周期 |
| 最小正周期 | 如果在周期函数的所有周期中存在一个⑥最小的正数，那么这个⑦最小的正数就叫作的最小正周期 |

##### 三、函数的对称性

|  |  |
| --- | --- |
| 轴对称 | 若函数满足⑧，则函数的图象关于直线对称 |
| 中心对称 | 若函数满足，则函数的图象关于点⑨中心对称 |
| 两个函数图象的对称 | 函数与的图象关于轴对称；函数与的图象关于轴对称；函数与的图象关于原点对称 |

###### 知识 拓展

周期性、对称性的常用结论

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 函数式满足关系 | 对称轴 | 对称中心 | 周期 |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  | ， |  |  |
|  | ， |  |  |
|  |  | ， |  |
|  |  | ， |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

#### 诊断自测

##### 题组1 走出误区

1. 判一判.（对的打“√”,错的打“×”）

（1） 若函数为奇函数，则一定有.( × )

（2） 若为偶函数，则.( √ )

（3） 若是函数的一个周期，则也是函数的周期.( √ )

（4） 若函数是奇函数，则函数的图象关于点中心对称.( √ )

2. （易错题）已知，则( B ).

A. 是偶函数 B. 是奇函数

C. 是非奇非偶函数 D. 既是奇函数又是偶函数

**【易错点】**忽略函数奇偶性对定义域的限制条件导致错误.

[解析]因为，所以解得且，定义域关于原点对称，所以，因为，所以为奇函数.故选.

##### 题组2 走进教材

3. （人教A版必修①P86·T11改编）已知函数是定义在上的偶函数，当时，，则.

[解析]因为函数是定义在上的偶函数，所以图象关于轴对称且，因为当时，，所以当时，，则，所以

4. （人教A版必修①P101·T9改编）已知奇函数在上单调递减，则它在上单调递减.（填“增”或“减”）

[解析]任取，

则.因为在上是减函数，所以.又为奇函数，所以，所以，即，所以在上单调递减.

##### 题组3 走向高考

5. [2023·新高考Ⅱ卷]若为偶函数，则( B ).

A. -1 B. 0 C. D. 1

[解析]因为为偶函数，所以，所以，解得，当时，，则，解得或，则的定义域为或，关于原点对称, 则，故此时为偶函数.故选.

### 考点聚焦·突破

#### 考点一 函数的奇偶性［多维探究］

##### 判断函数的奇偶性角度1

典例1 判断下列函数的奇偶性.

（1）；

（2）

（3）.

[解析]（1）由得，解得,即原函数的定义域为，从而，所以既是奇函数又是偶函数.

（2）显然函数的定义域为.

因为当时，，

所以.

同理，当时，.故函数为奇函数.

（3）显然函数的定义域为.

,故为奇函数.



**函数奇偶性的判断方法**

|  |  |
| --- | --- |
| 定义法 |  |
| 图象法 |  |
| 性质法 | 设,的定义域分别是,,则在它们的公共定义域上:奇奇奇,奇×奇偶,偶偶偶,偶×偶偶,奇×偶奇 |

##### 利用奇偶性求解析式角度2

典例2 已知函数是定义在上的奇函数，且当时，，则当时，( D ).

A. B. C. D.

[解析]当时，，因为是奇函数，

所以.故选.

##### 利用奇偶性求函数值角度3

典例3 已知函数，且，则( D ).

A. 2 B. 3 C. D.

[解析]设，则，

因为，

所以为奇函数，

因为，

所以，

则.故选.

##### 利用奇偶性求参数值角度4

典例4 [2023·全国甲卷]若为偶函数，则2．

[解析]因为为偶函数，所以,即,得.



**函数奇偶性的应用类型及解题策略**

|  |  |
| --- | --- |
| 求解析式 | 先将待求区间上的自变量转化到已知区间上，再利用奇偶性求出的解析式或充分利用奇偶性构造关于的方程（组），从而得到的解析式 |
| 求函数值 | 利用函数的奇偶性将待求函数值转化为已知区间上的函数值，进而求解 |
| 求参数值 | 利用待定系数法求解，根据得到关于待求参数的恒等式，由系数的对等性得出参数的值.对于在处有定义的奇函数，可考虑列等式求解 |
| 解不等式 | 利用奇、偶函数的图象特征或根据奇函数在对称区间上的单调性一致、偶函数在对称区间上的单调性相反，将问题转化到同一单调区间上求解，涉及偶函数时常用，将问题转化到在上求解 |

##### 多维训练

1. [2024·江西校考]下列函数中，既是奇函数又在上单调递减的是( C ).

A. B. C. D.

[解析]对于，的定义域为，故不正确；

对于，在定义域上单调递增，故不正确；

对于，既为奇函数又为减函数，故正确；

对于，为非奇非偶函数，故不正确.故选.

2. [2023·全国乙卷]已知是偶函数，则( D ).

A. B. C. 1 D. 2

[解析]因为为偶函数，

所以，

又因为不恒为0，所以，即，

则，即，解得.故选.

3. [2024·南昌开学考试]（双空题）已知是定义域为的奇函数，当时，，则，的解析式为.

[解析]是定义域为的奇函数，当时，，则.

当时，,则,所以，

因为是定义在上的奇函数，所以.

综上，的解析式为

#### 考点二 函数的周期性［师生共研］

典例5 （1）已知是定义在上的函数，且，当时，，则.

（2）已知定义在上的函数满足，当时，，当时，，则339.

[解析]（1）因为，则，所以函数是周期为6的周期函数，则.

（2）因为，所以函数是周期为6的周期函数，，

当时，，所以，，，，

当时，，所以，，

所以.

故

.



**函数周期性的判定与应用的解题策略**

|  |  |
| --- | --- |
| 判定 | 判断函数的周期只需证明，便可证明函数是周期函数，且周期为，函数的周期性常与函数的其他性质综合命题 |
| 应用 | 根据函数的周期性，可以由函数局部的性质得到函数的整体性质，即周期性与奇偶性都具有将未知区间上的问题转化到已知区间上的功能.在解决具体问题时，要注意，若是函数的周期，则且也是函数的周期 |

##### 针对训练

1. 已知定义在上的函数满足，当时，，则2.

[解析]因为，所以，所以函数是周期为4的周期函数，则.

2. 若函数满足，且，则3.

[解析]因为，所以，所以函数是周期为6的周期函数，则.

#### 考点三 函数的对称性［自主练透］

1. 已知定义在上的函数满足，若的图象关于直线对称，则下列结论正确的是( A ).

A. B. C. D.

[解析]因为的图象关于直线对称，则，所以，,.

又因为满足，所以的图象关于点中心对称，且，所以.故选.

2. 设函数的定义域为，则函数的图象与的图象( C ).

A. 关于轴对称 B. 关于轴对称

C. 关于直线对称 D. 关于直线对称

[解析]的图象是由的图象向右平移1个单位长度得到的，的图象是由的图象向右平移1个单位长度得到的.

因为与的图象关于轴（即直线）对称，所以与的图象关于直线对称.故选.



**函数对称性问题的解题策略**

1.求解与函数的对称性有关的问题时，应根据题目特征和对称性的定义，求出函数的对称轴或对称中心.

2.解决函数对称性有关的问题时，一般结合函数图象，利用对称性解决求值或参数问题.